# 第 2 节 奇偶数列问题—综合篇（★★★★）

## 强化训练

1.（2023 •全国模拟 •★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,n\text{为奇数}\\a_n+1,n\text{为偶数}\end{cases}$，若$3\le a_5\le 15$，则$a_1$的取值范围是_____.

**答案：**$[0,3]$

**解析：**给出$a_5$的范围，让求$a_1$的范围，故先寻找$a_5$和$a_1$的关系，$a_5$与$a_1$隔得近，直接逐项递推即可，

由题意，$a_2=2a_1$，$a_3=a_2+1=2a_1+1$，$a_4=2a_3=4a_1+2$，$a_5=a_4+1=4a_1+3$，

因为$3\le a_5\le 15$，所以$3\le 4a_1+3\le 15$，故$0\le a_1\le 3$.

2.（2022 • 威海模拟 • ★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\a_n,n=2k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$.

（1）求$a_2$，$a_5$的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$.

**解：**（1）（要求$a_2$和$a_5$，按递推公式逐项计算即可）



因为$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\a_n,n=2k\end{cases}$，所以$a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2=2$，$a_4=a_3+1=3$，$a_5=a_4=3$.

（2）（数列$\{a_n\}$的递推式按奇偶分段，要求前$n$项和，可先分析奇数项和偶数项的规律，先把递推式中的$n=2k$和$n=2k-1$分别代进去看看）

因为$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1\\a_n,n=2k\end{cases}$，所以$\begin{cases}a_{2k}=a_{2k-1}+1 & ①\\a_{2k+1}=a_{2k} & ②\end{cases}$，（观察发现消去$a_{2k}$，即可得到相邻奇数项的关系）

将①代入②得：$a_{2k+1}=a_{2k-1}+1$，从而$a_{2k+1}-a_{2k-1}=1$，故$a_1$，$a_3$，$a_5$，$\cdots$ 构成公差为 1 的等差数列，

（又由②知偶数项跟与之相邻的下一项相等，故求和时可按奇偶项分组，先考虑$n$为偶数的情形）

当$n$为偶数时，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{n-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_n)$

$$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{n-1})+(a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{n+1})=\frac{n}{2}a_1+\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}{2}\times 1+\frac{n}{2}a_3+\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}{2}\times 1$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{n(n-2)}{8}+n+\frac{n(n-2)}{8}=\frac{n^2+4n}{4};$$

当$n$为奇数时，$S_n=S_{n+1}-a_{n+1}=S_{n+1}-a_{n+2}$，

（其中$S_{n+1}$下标为偶数，可代前面的结果计算，$a_{n+2}$是奇数项中的第$\frac{n+1}{2}+1$项，可代等差数列通项公式算）

所以$S_n=\frac{(n+1)^2+4(n+1)}{4}-(1+\frac{n+1}{2}\times 1)=\frac{n^2+4n-1}{4}$；

综上所述，$S_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+4n}{4},n\text{为偶数}\\ \dfrac{n^2+4n-1}{4},n\text{为奇数}\end{cases}$.

3.（2023·保定模拟·★★★★）已知正项数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为$S_n$，且$a_1=2$，$a_{n+1}a_n=4S_n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）若$b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 $n$ 项和$T_n$.

**解**：（1）（给出$a_n$与$S_n$混搭的关系式，要求的是$a_n$，故退 $n$ 相减消去$S_n$）

因为$a_{n+1}a_n=4S_n$，所以当$n\ge 2$时，$a_na_{n-1}=4S_{n-1}$，两式作差得：$a_{n+1}a_n-a_na_{n-1}=4S_n-4S_{n-1}=4a_n$，

整理得：$a_n(a_{n+1}-a_{n-1}-4)=0$，因为$\{a_n\}$是正项数列，所以$a_n>0$，从而$a_{n+1}-a_{n-1}-4=0$，故$a_{n+1}-a_{n-1}=4$，

（$a_{n+1}-a_{n-1}=4(n\ge 2)$和$a_{n+2}-a_n=4(n\in\mathbf{N}^*)$的意思相同，故需分奇偶讨论，分别求通项）

所以数列$\{a_n\}$的奇数项、偶数项分别构成公差为 4 的等差数列，

当 $n$ 为奇数时，设$n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则$k=\dfrac{n+1}{2}$，$a_n=a_{2k-1}=a_1+(k-1)\cdot 4=4k-2=4\cdot\dfrac{n+1}{2}-2=2n$；

当 $n$ 为偶数时，设$n=2k$，则$k=\dfrac{n}{2}$，$a_n=a_{2k}=a_2+(k-1)\cdot 4$ ①，

在$a_{n+1}a_n=4S_n$中取$n=1$可得$a_2a_1=4S_1=4a_1$，所以$a_2=4$，代入①得：$a_n=4+(k-1)\cdot 4=4k=4\cdot\dfrac{n}{2}=2n$；

综上所述，对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n=2n$.



（2）由（1）可得$b_n=2n\cdot 2^{2n}=2n\cdot 4^n$，（数列$\{b_n\}$为“等差×等比”，可用错位相减法求和）

所以$\begin{cases}T_n=2\times 4^1+4\times 4^2+6\times 4^3+\cdots+2(n-1)\cdot 4^{n-1}+2n\cdot 4^n & ②\\ 4T_n=\qquad 2\times 4^2+4\times 4^3+6\times 4^4+\cdots+2(n-1)\cdot 4^n+2n\cdot 4^{n+1} & ③\end{cases}$，

②－③得：$-3T_n=2\times 4^1+2\times 4^2+2\times 4^3+\cdots+2\times 4^n-2n\cdot 4^{n+1}=\dfrac{2\times 4^1(1-4^n)}{1-4}-2n\cdot 4^{n+1}=\dfrac{8(4^n-1)}{3}-2n\cdot 4^{n+1}$

$=\dfrac{8\times 4^n-8}{3}-2n\cdot 4^{n+1}=\dfrac{2\times 4^{n+1}-8-6n\cdot 4^{n+1}}{3}=\dfrac{(2-6n)\cdot 4^{n+1}-8}{3}$，

所以$T_n=\dfrac{(6n-2)\cdot 4^{n+1}+8}{9}$.

4.（2023·全国模拟·★★★★）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=pa_n(p\ne 1)$，且$a_2+a_3$，$a_3+a_4$，$a_4+a_5$成等差数列.

（1）求 $p$ 的值和$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设$b_n=\begin{cases}a_n^2,n\text{为奇数}\\ \log_2 a_n,n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列$\{b_n\}$的前 $n$ 项和$S_n$.

**解**：（1）（由$a_{n+2}=pa_n$结合$a_1$，$a_2$可将$a_3$，$a_4$，$a_5$用 $p$ 表示，再由所给三项成等差数列建立方程求 $p$）

由题意，$a_3=pa_1=p$，$a_4=pa_2=2p$，$a_5=pa_3=p^2$，

因为$a_2+a_3$，$a_3+a_4$，$a_4+a_5$成等差数列，所以$2(a_3+a_4)=a_2+a_3+a_4+a_5$，即$2(p+2p)=2+p+2p+p^2$，

解得：$p=2$ 或 1，又由题意，$p\neq 1$，所以 $p=2$，故 $a_{n+2}=2a_n$，

（递推式为 $a_{n+2}$ 和 $a_n$ 的关系，故考虑分奇偶讨论求通项）

所以 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项分别构成公比为 2 的等比数列，

当 $n$ 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $k=\frac{n+1}{2}$，$a_n=a_{2k-1}=a_1\cdot 2^{k-1}=2^{k-1}=2^{\frac{n+1}{2}-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$；

当 $n$ 为偶数时，设 $n=2k$，则 $k=\frac{n}{2}$，$a_n=a_{2k}=a_2\cdot 2^{k-1}=2^k=2^{\frac{n}{2}}$；

综上所述，$a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}},n\text{为奇数}\\2^{\frac{n}{2}},n\text{为偶数}\end{cases}$.

（2）由题意，$b_n=\begin{cases}a_n^2,n\text{为奇数}\\\log_2 a_n,n\text{为偶数}\end{cases}$，结合（1）中结果可得 $b_n=\begin{cases}2^{n-1},n\text{为奇数}\\\frac{n}{2},n\text{为偶数}\end{cases}$，

（$b_n$ 按奇偶分段，故求 $S_n$ 也应按奇数项、偶数项分组，先考虑 $n$ 为偶数的情形）

当 $n$ 为偶数时，设 $n=2k$，则 $k=\frac{n}{2}$，$S_n=S_{2k}=(b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2k-1})+(b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2k})$

$=(2^0+2^2+2^4+\cdots+2^{2k-2})+(1+2+3+\cdots+k)=\frac{1-4^k}{1-4}+\frac{k(1+k)}{2}=\frac{4^k-1}{3}+\frac{k(1+k)}{2}$

$=\frac{4^{\frac{n}{2}}-1}{3}+\frac{\frac{n}{2}(1+\frac{n}{2})}{2}=\frac{2^n-1}{3}+\frac{n(2+n)}{8}$；



当 $n$ 为奇数时，$S_n=S_{n+1}-b_{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{3}+\frac{(n+1)(2+n+1)}{8}-\frac{n+1}{2}=\frac{2^{n+1}-1}{3}+\frac{n^2-1}{8}$；

综上所述，$S_n=\begin{cases}\frac{2^n-1}{3}+\frac{n(2+n)}{8},n\text{为偶数}\\\frac{2^{n+1}-1}{3}+\frac{n^2-1}{8},n\text{为奇数}\end{cases}$.

5.（2023•江西模拟•★★★★）设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，已知 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明：$a_{n+2}=3a_n$；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

**解：**（1）（所给关系为 $a_n$ 与 $S_n$ 混搭型，要证的是 $a_{n+2}=3a_n$，故考虑退 $n$ 相减消 $S_n$）

因为 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3$，所以当 $n\geq 2$ 时，$a_{n+1}=3S_{n-1}-S_n+3$，

两式相减得：$a_{n+2}-a_{n+1}=3S_n-S_{n+1}+3-(3S_{n-1}-S_n+3)=3a_n-a_{n+1}$，整理得：$a_{n+2}=3a_n$，

（在 $a_{n+1}=3S_{n-1}-S_n+3$ 中 $n\geq 2$，所以用它证得的 $a_{n+2}=3a_n$ 也要求 $n\geq 2$，故需单独验证 $n=1$ 时的情况）

在 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3$ 中取 $n=1$ 得 $a_3=3S_1-S_2+3=2a_1-a_2+3=3=3a_1$，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+2}=3a_n$.

（2）（若看不懂 $a_{n+2}=3a_n$，可取一些值代进去看看，$\begin{cases}a_3=3a_1,a_5=3a_3,a_7=3a_5,\cdots\\a_4=3a_2,a_6=3a_4,a_8=3a_6,\cdots\end{cases}$，规律就出来了）

由（1）知 $a_{n+2}=3a_n$，所以 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项分别构成以 3 为公比的等比数列，

（于是接下来求通项也应分奇偶讨论，可分别计算 $a_{2k-1}$ 和 $a_{2k}$，再换回成 $a_n$）

当 $n$ 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $k=\dfrac{n+1}{2}$， $a_n=a_{2k-1}=a_1\cdot 3^{k-1}=3^{k-1}=3^{\frac{n+1}{2}-1}=3^{\frac{n-1}{2}}$；

当 $n$ 为偶数时，设 $n=2k$，则 $k=\dfrac{n}{2}$， $a_n=a_{2k}=a_2\cdot 3^{k-1}=2\times 3^{k-1}=2\times 3^{\frac{n}{2}-1}$；

综上所述， $a_n=\begin{cases}3^{\frac{n-1}{2}},n\text{为奇数}\\ 2\times 3^{\frac{n}{2}-1},n\text{为偶数}\end{cases}$.

**【反思】**若 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q(q\neq 0)$，则 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项各自构成公比为 $q$ 的等比数列，所以遇到这类递推式，应分奇偶讨论求通项公式.